

各向异性网格自适应计算在超燃模拟中的应用

邹建锋¹, 盛东¹, 方磊², 郑耀¹

(1. 浙江大学 航空航天学院, 杭州 310027;

2. 中国航天科技集团公司 中国运载火箭技术研究院 研究发展中心, 北京 100076)

摘 要: 采用各向异性网格自适应求解技术, 将其应用于 DLR 超燃冲压发动机燃烧室中的超燃模拟. 开展了 3 个算例, 包括采用滑移壁面条件的燃烧室冷流场模拟、采用无滑移壁面条件的冷流场模拟及采用无滑移壁面条件的反应流模拟. 模拟中, 各向异性网格自适应计算捕捉到了如激波、射流、边界层、火焰面等具有各向异性特征的大梯度区域, 并利用各向异性网格进行了很好的加密. 对比利用各向同性网格的初始流场计算, 各向异性网格自适应计算使基于滑移条件、无滑移条件的冷流计算及反应流计算的网格单元数量分别下降了 36.2%, 36.4% 和 36.8%, 有效降低了计算规模, 而且流场大梯度区域的计算结果更准确, 分辨率更好. 结果表明: 对于像超燃这类具有各向异性特征的问题, 各向异性网格系统比各向同性网格系统有更好的计算效率及准确性, 同时也表明基于 Mach 数场构造的各向异性网格系统可以有效应用于超燃计算.

关 键 词: 各向异性非结构网格; 网格自适应; 度量张量; 超声速燃烧; 超燃冲压发动机

中图分类号: V235.21

文献标志码: A

Applications of anisotropic unstructured mesh adaption in supersonic combustion simulations

ZOU Jian-feng¹, SHENG Dong¹, FANG Lei², ZHENG Yao¹

(1. School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;

2. Research and Development Center, China Academy of Launch Vehicle Technology, China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100076, China)

Abstract: Anisotropic unstructured mesh adaption has been introduced and used in 2-D simulations of supersonic combustion in the DLR (Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt) scramjet combustion chamber. Three cases of non-reaction flow simulation with slip wall conditions, non-reaction flow simulation with non-slip wall conditions and reaction flow simulation (with nonslip wall conditions) were carried out. In the calculations, large gradient areas with anisotropic characteristics, such as shockwaves, jet-flows, boundary layers, and flames, were detected and well refined with anisotropic meshes. As a result, compared with the initial simulation using an isotropic mesh, element numbers were reduced by 36.2%, 36.4% and 36.8%, respectively, in case of slip conditions, nonslip conditions and reactions, meanwhile the accuracy and resolution in large gradient areas was even better. The results show high efficiency and high accuracy of anisotropic mesh approach compared with the isotropic mesh, for the problems with significant anisotropic characteristics such as supersonic combustion. It has been demonstrated that Hessian metrics based on Mach numbers can be used to generate anisotropic meshes for the supersonic combustion simulation.

收稿日期: 2014-02-27

基金项目: 国家自然科学基金(11372276, 1070206)

作者简介: 邹建锋(1977—), 男, 浙江衢州人, 副教授, 博士, 主要从事湍流燃烧数值模拟研究.

Key words: anisotropic unstructured mesh; mesh adaption; hessian metric; supersonic combustion; scramjet

超声速燃烧问题是发展超燃冲压发动机技术的基础. 超燃数值模拟中计算精度与计算效率的矛盾目前只有网格自适应算法能较好地处理^[1]. 而超燃冲压发动机中的流场又具有显著的各向异性特征, 尤其是在支板附近、壁面边界层、火焰面等区域, 流场物理量的空间分布具有很强的方向性. 对此, 各向异性网格自适应计算成为一种应对方法.

文献[2]将各向异性网格自适应计算成功应用于含楔形支板的超燃冲压发动机进气道、NA-CA0012 翼型超声速绕流、后台阶流动及圆柱绕流的数值模拟; 文献[3]采用各向异性网格自适应计算研究了 Stefan 问题, 验证了该方法应用于三维相变问题的可行性. 文献[4]在 DLR(德国宇航中心)超燃冲压发动机的数值模拟研究中运用了各向异性网格自适应计算, 其反应流计算采用了拉格朗日间断模型(model intermittent Lagrangian, MIL).

笔者之前的工作^[5]将各向异性网格自适应求解技术应用于超声速无反应流计算, 其表现出了良好的适应性和有效性. 本文希望将此方法进一步应用到几何结构与流动特征更加复杂的超燃冲压发动机内流燃烧问题中.

1 各向异性网格自适应求解过程

各向异性网格自适应算法包含度量张量的离散定义和基于度量张量的网格生成. 网格单元的尺寸、形状和朝向等几何信息存放在度量张量中, 作为自适应网格创建过程的输入数据. 文献[6-13]对各向异性网格的创建技术以及度量张量的离散定义方法做了广泛的研究. 本文参照文献[14-15]中算法. 自适应迭代求解过程可以描述如下.

1) 计算域初始网格系统创建

应用基于阵面推进技术(advanced front technique, AFT)的三角形网格生成程序, 对所研究问题的计算域进行三角形网格划分 $T_k(k=0)$, 得到计算域的初始网格系统.

2) 流场解获取

应用本文第2小节介绍的湍流燃烧问题求解方法, 获得 $T_k(k \geq 0)$ 网格系统上的流场解 ϕ_k .

3) 度量张量矩阵计算

基于流场解 ϕ_k , 计算得到描述流场误差信息的 Hessian 矩阵 $\mathbf{H}_k$ 及其对应的度量张量矩阵 $\mathbf{M}_k$. 度量张量矩阵 $\mathbf{M}_k$ 是描述三角形网格单元形状与尺寸特征的度量标准, 是创建高质量各向异性网格的基础, 数学表达式为方程(1). 其中, ϕ_k 是任一流场物理量的第 k 次迭代解, λ_i 与 $\mathbf{V}$ 分别是 Hessian 矩阵 $\mathbf{H}_k$ 的特征值与特征矢量. 针对超声速流动应用了基于 Mach 数场的度量张量矩阵 $\mathbf{M}_k$.

$$\mathbf{H}_k = \{H_{k,ij}\}$$

$$H_{k,ij} = \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{V}^T \text{diag}\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} \mathbf{V}$$

4) 网格系统质量判断

如果网格系统质量达到预定值 q , 则自适应循环结束并退出. 各向异性网格系统的质量定义在度量张量 $\mathbf{M}_k$ 所系的几何空间之上. 即基于各向异性网格的自适应求解, 所获得的最优网格系统要求网格单元在度量空间 $\mathbf{M}_k$ 内满足各向同性网格的几何最优特征. 网格单元质量定义式为

$$Q_{\mathbf{M}_k}(\Delta) = 12\sqrt{3} \frac{|\Delta|_{\mathbf{M}_k}}{p(\Delta)_{\mathbf{M}_k}^2} F\left(\frac{p(\Delta)_{\mathbf{M}_k}}{3h^*}\right) \quad (2)$$

其中 $|\Delta|$ 和 $p(\Delta)$ 分别是网格单元的面积与周长尺寸, $h^* = h^*(N^*)$ 是计算域网格单元的平均尺寸, 所有几何测度都在度量空间 $\mathbf{M}_k$ 内进行. 函数 $F(t)$ ($0 \leq F \leq 1$) 是任意的极值点在 $t=1$ 处的凸函数. 网格质量期望值 q 与网格单元期望数目 N^* 需预先给定.

5) 基于度量张量矩阵的各向异性网格划分

对计算域执行新的三角划分 T_{k+1} , 以获得在度量张量 $\mathbf{M}_k$ 定义的几何空间内为最优的三角化系统. 具体实现过程中, 需要通过增删节点、交换边, 以及移动节点等局部操作以获取最优网格系统.

6) 返回第2步

利用获得的新网格系统再次进行流场计算.

2 湍流燃烧求解技术

本文中流场计算基于非定常 RANS 方法, 湍流模型采用 $k-\omega$ SST 模型, 化学反应计算基于 7 步 7 组分基元反应机理的火焰面燃烧模型, 时间

积分采用隐式非稳态推进,考虑到带支板燃烧室内在除支板尾部反应区以外的多数流动区域内不具有强非定常特征,计算中网格自适应迭代操作不在每个时间步上进行,而是在现有网格上计算直到流场在大尺度上较为稳定后,根据得到的流场解生成新的各向异性网格,从而完成一次网格自适应迭代计算。接下来,在新生成的各向异性网格上重新进行流场计算。需要提及的是,应用各向异性网格系统不需要专门的求解器。

3 DLR 超燃冲压发动机内流场模拟

首先,选用文献[1]中的 DLR 超燃冲压发动机对本文提出的方法进行验证。图 1 给出了燃烧室简图。燃烧室进口高 50 mm,支板距离进口 35 mm、长 32 mm、高 6 mm。氢气通过支板后端小孔喷入燃烧室,喷口直径 1 mm。坐标原点取在进口下壁面处。空气来流及氢气喷流的进口边界条件等计算参数如表 1 所示。

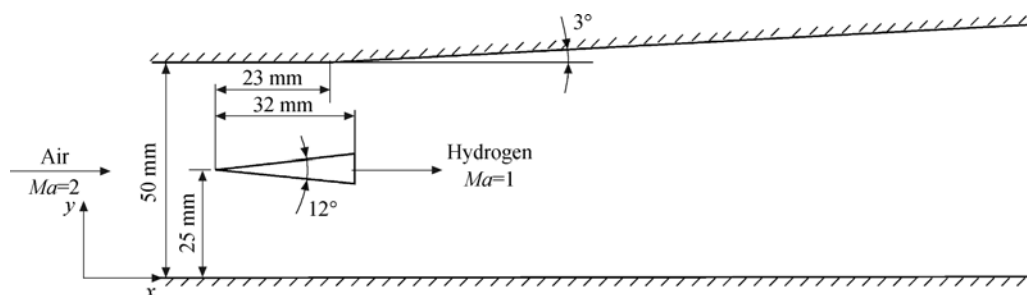


图 1 DLR 超燃冲压发动机燃烧室简图

Fig. 1 Sketch of the DLR scramjet combustion chamber

表 1 空气来流及氢气喷流进口条件

Table 1 Inflow conditions of the air stream and the hydrogen jet

气体	Ma	T/K	$p/10^5$ Pa	$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	w_{O_2}	w_{N_2}	$w_{\text{H}_2\text{O}}$	w_{H_2}
Air	2.0	340	1	1.002	0.232	0.736	0.032	0
H ₂	1.0	250	1	0.097	0	0	0	1

3.1 冷流计算:滑移壁面

文献[1]中的计算,支板上采用无滑移壁面条件,上下壁面采用滑移壁面条件,得到的结果与实验基本符合。文献[5]中,基于无黏流体,计算结果有良好的收敛精度,且在流场的大梯度区域具有很高的分辨率。本节计算基于滑移壁面条件,不考虑边界层的影响,着重考察各向异性网格自适应计算对黏性流体中激波及射流区域的捕捉。

初始网格为各向同性网格,在支板两侧及后方、喉道处上下壁面附近做了网格加密,总单元数

83255,总节点数 42090。创建单元规模较大的初始网格,是为了与自适应结果进行有效的对比,以考察各向异性网格自适应求解的优势;如果仅仅作为自适应求解的初始网格,单元规模可以降低。图 2 是在 DLR 燃烧室初始网格上获得的流场解,为方便与实验得到的纹影图对比,以数值纹影图的形式给出,描述密度梯度的大小,变量的定义式为: $\exp[-k|\text{grad } \rho|/\max(|\text{grad } \rho|)]$,其中 k 为非线性系数。

图 3 展示了自适应求解过程中网格分布与流

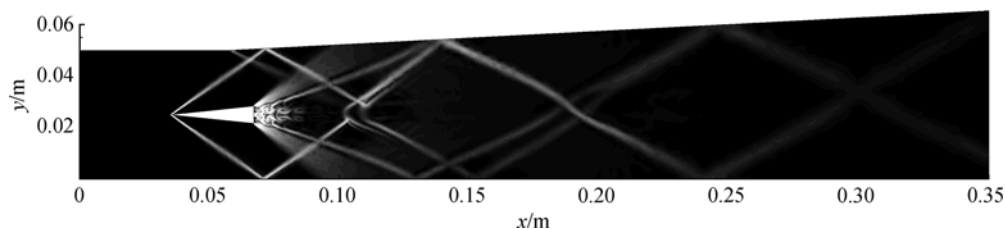


图 2 初始网格上的流场解

Fig. 2 Solution field with initial mesh

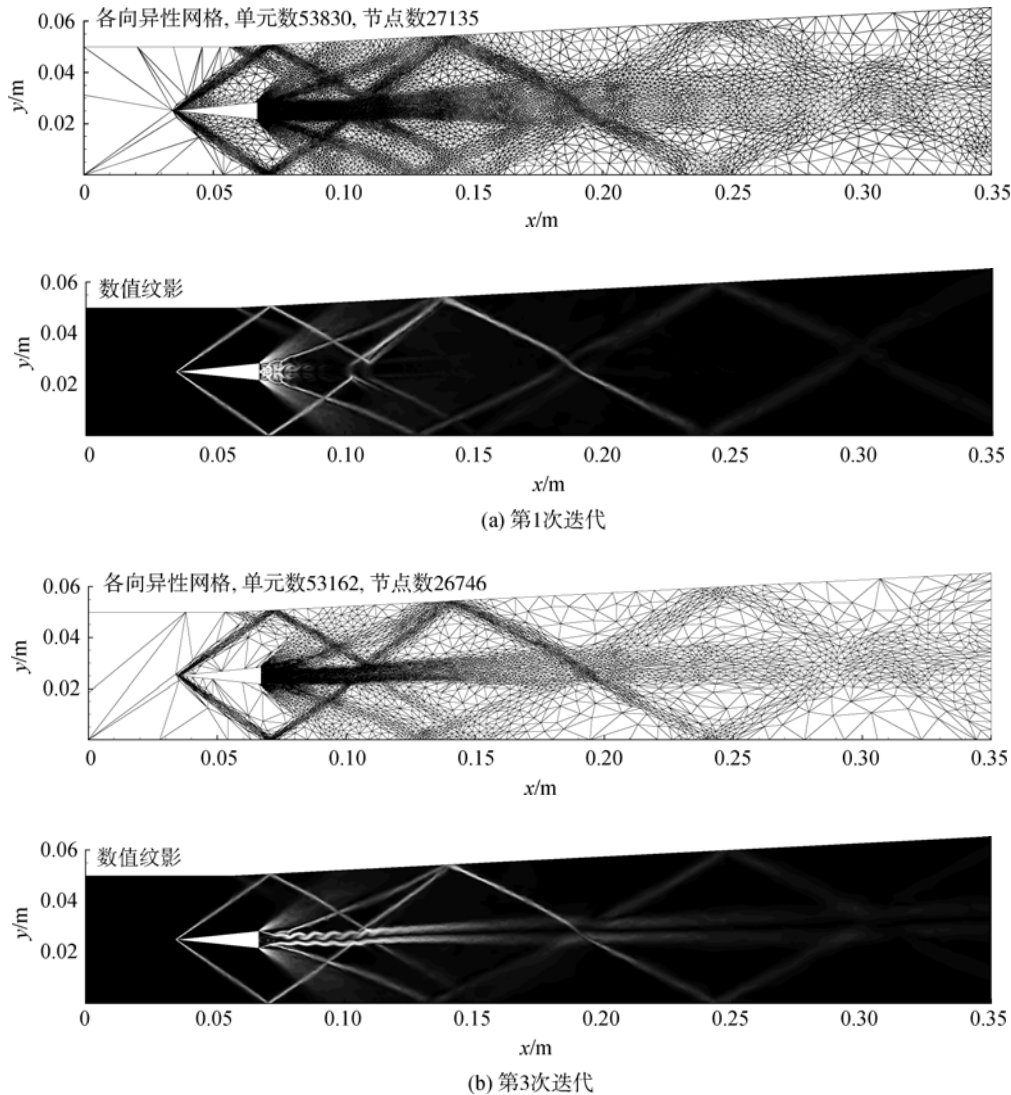


图3 基于滑移壁面条件的自适应求解过程

Fig. 3 Adaptive solution for DLR chamber base on slip wall condition

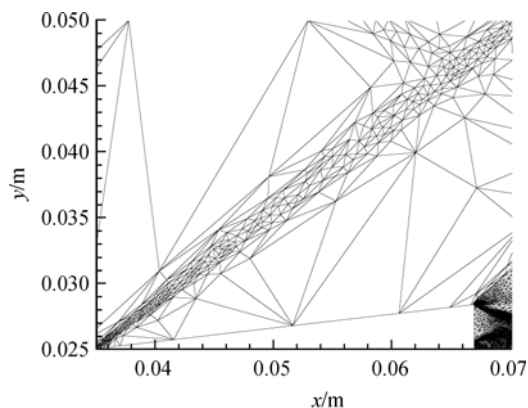
场结构的演变历程. 自适应计算网格单元期望数目 N^* 设置为 6 万(下同). 从图 3(a)可以看出各向异性网格自适应求解的第 1 次迭代就取得了明显的效果,度量张量很好地捕捉到了流场中的大梯度区域,网格资源明显向激波、膨胀波及氢气射流区域汇集. 计算得到的激波宽度变窄,燃烧室后部的激波宽度变化尤为明显;氢气射流和空气来流的界面趋于明显. 经过三次迭代,自适应求解过程趋于稳定. 从图 3(b)可以看出,网格单元被有效地分配到激波、膨胀波附近及射流区域,计算结果在大梯度区域的分辨率进一步提升,支板后侧膨胀波系、激波、氢气射流与空气来流的交界变得更加清晰,燃烧室后部氢气与空气的混合区域也被很好地捕捉到. 图 4 展示了各向异性网格的局部特征,图 5(a)为支板上方斜激波及附近区域网格,图 5(b)为氢气喷口处上半区域的网格,具

体位置见图中坐标.

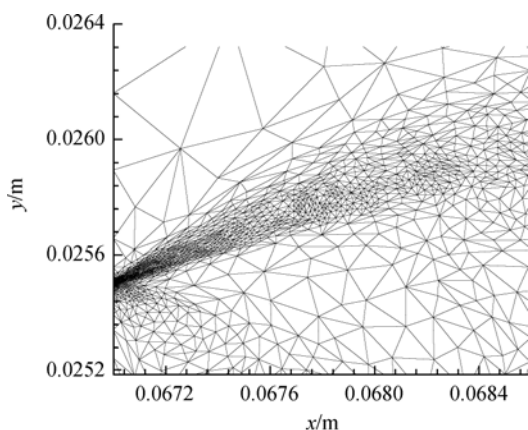
图 5 给出了三次迭代生成的各向异性网格上的计算结果与实验纹影图^[16]的对比,可见计算结果与实验符合甚好. 对比文献[1]计算得到的密度云图,本计算结果对氢气与空气混合区域的描述分辨率更高. 从图 6 中看到本节计算得到的下壁面压力分布曲线与实验测得的压力分布有所不同,本节计算得到的上下壁面上第 2 道激波反射点的位置比实验结果偏后一些,与 Oevermann 的计算结果大致相同. 产生这一误差可能是由于采用了滑移壁面边界条件,导致第 2 道激波反射点附近的网格数目过于稀疏,影响了激波与壁面相互作用这一流动特征的有效模拟.

3.2 冷流计算:无滑移壁面

无滑移壁面条件更接近真实流动状态,能更加准确地考虑边界内的流动和传热特性. 本节采



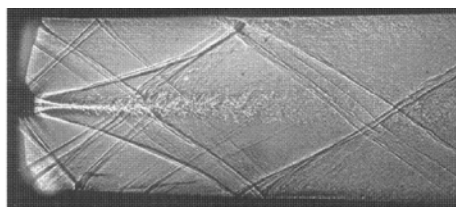
(a) 支板上斜激波及附近



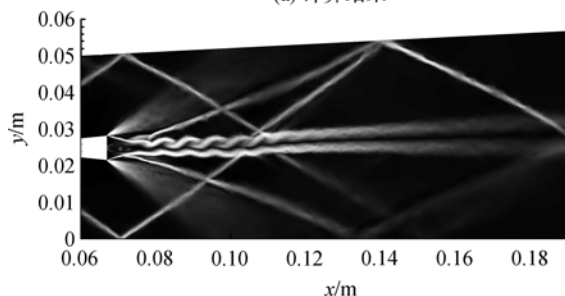
(b) 氢气喷口射流边缘

图4 局部网格特征

Fig. 4 Detailed geometry



(a) 计算结果



(b) 实验结果

图5 计算结果与实验结果的对比

Fig. 5 Calculation result compares with experiment

用无滑移壁面条件进行 DLR 超燃冲压发动机超燃室的各向异性网格自适应计算, 从而进一步考察各向异性网格自适应计算对边界层内流动的自

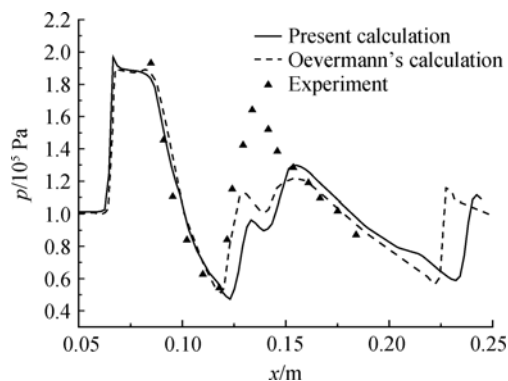


图6 下壁面压力分布

Fig. 6 Pressure distributions along lower wall

适应捕捉能力.

燃烧室初始网格与上节一样. 图7是初始网格上基于无滑移壁面条件获得的流场解. 数值纹影图捕捉到了上下壁面附近的密度变化, 正是边界层. 但由于初始网格没有在边界层附件布置足够多的网格节点, 限制了边界层附近流场的描述. 除做了网格加密的喉道附近模糊地捕捉到了边界层, 远离喉道的上下壁面上很难看到物理量急剧变化的体现.

图8展示了基于无滑移壁面条件的自适应求解过程中网格分布与流场结构的演变历程. 可以看出, 在主流区计算结果与上节滑移壁面条件的计算结果表现接近一致; 而且, 除激波与射流区域外, 与前面的计算结果相比, 本节的计算还有效捕捉到了壁面边界层这个大梯度区域, 并进行了有效的网格加密. 图9给出了喉道位置上下壁面 y^+ 的情况, 其数值大致在 40~200 之间.

经过自适应迭代, 边界层内布置了合理的网格数量, 这为准确计算边界层内流动及激波/边界层相互作用提供了条件. 图10展示了壁面附近网格的局部特性, 图10(a)是支板上下两侧, 图10(b)是上壁面第二个激波反射点及附近区域, 可以看到壁面边界层上网格的各向异性特征非常明显.

图11给出了燃烧室下壁面压力分布. 采用两种壁面条件计算得到的压力分布接近一致. 相比之下, 无滑移壁面计算得到的压力分布曲线中, 第二个激波反射点的位置有所提前, 且与实验测量值更为接近. 计算得到的压力最小处也与实验测得数据准确匹配, 比采用滑移壁面条件的计算结果更加准确. 由于无滑移壁面边界条件的采用, 自适应计算过程中在壁面附近以及第二个激波反射点附近布置了更加密集的网格节点, 有效提高了

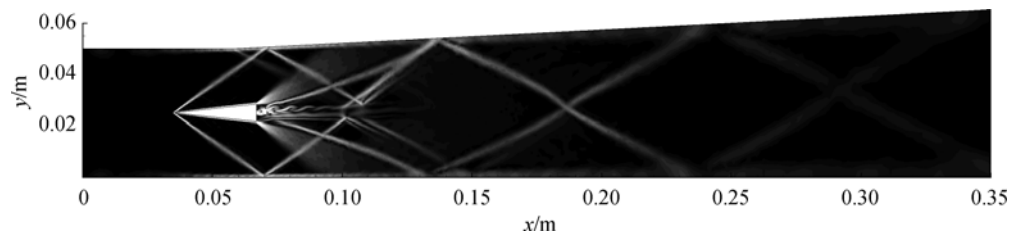


图7 基于无滑移壁面条件的初始流场解

Fig. 7 Initial solution field base on nonslip wall condition

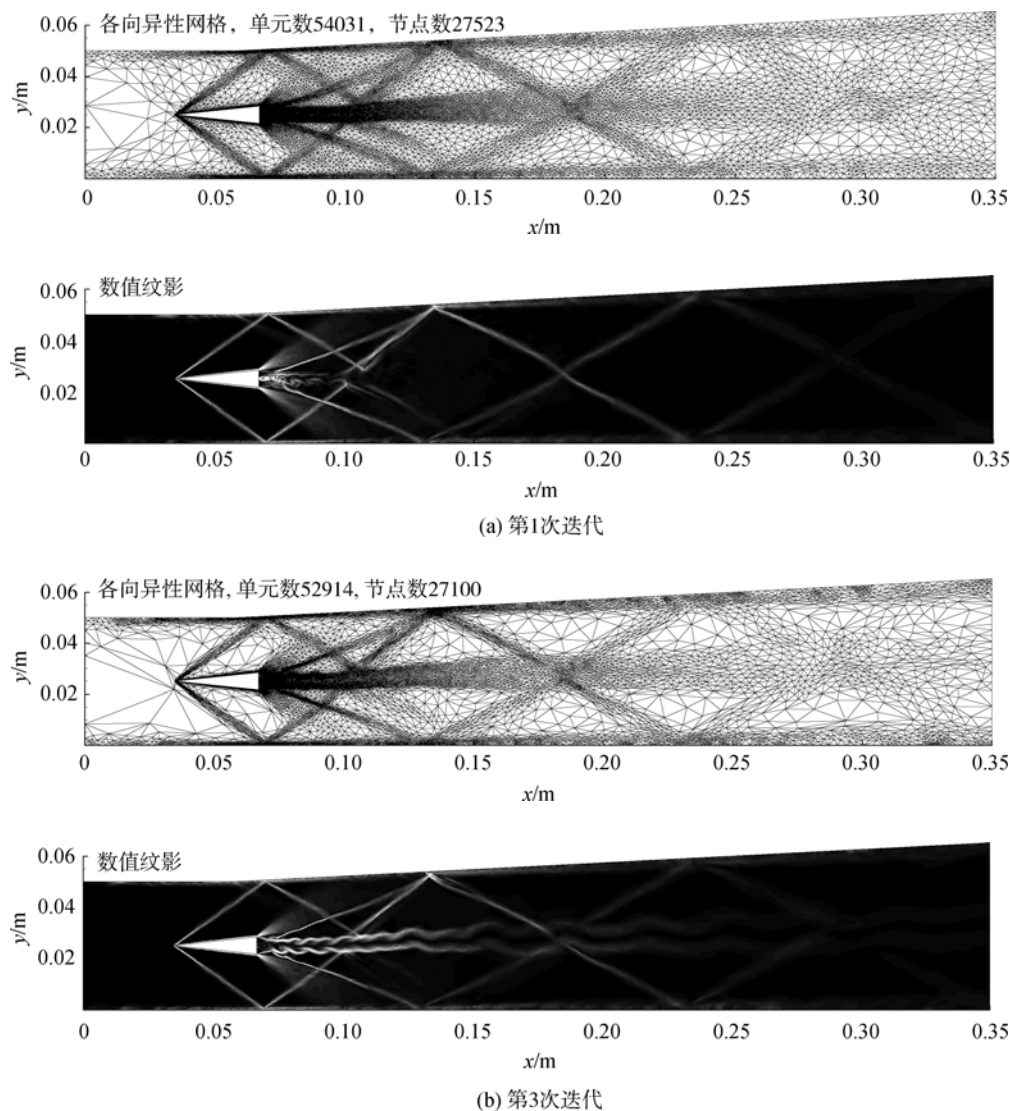


图8 基于无滑移壁面条件的自适应求解过程

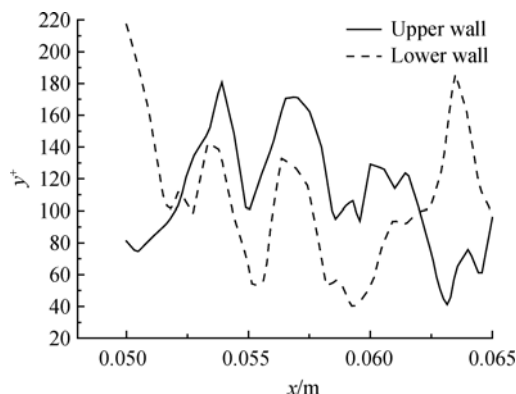
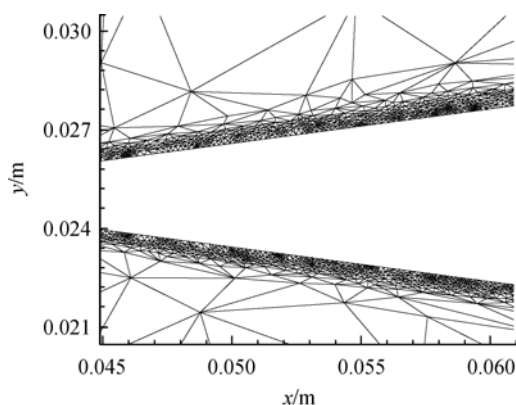
Fig. 8 Adaptive solution for DLR chamber base on nonslip wall condition

边界层以及激波/边界层相互作用区域的计算精度. 可见, 各向异性网格自适应计算技术能够很好地捕捉和处理壁面边界层附近的流动及网格加密, 提高边界层附近传质传热的计算精度和可靠性. 图12给出了燃烧室上下壁面壁面摩擦力的分布曲线. 燃烧室壁面摩擦力的计算是发动机推阻力计算的组成部分, 影响发动机推进效率的正确

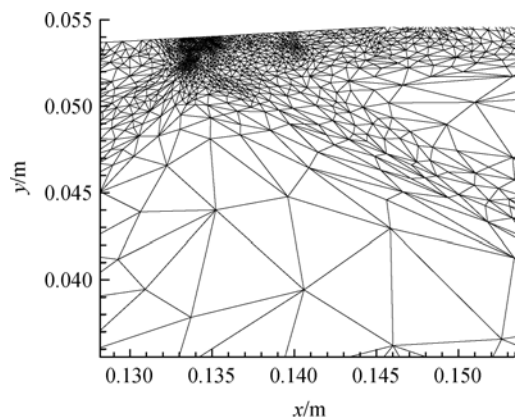
计算, 是设计燃烧室需要考虑的重要参数. 各向异性网格自适应计算为准确计算壁面摩擦力创造了有利条件.

3.3 反应流计算

采用无滑移壁面的冷流计算中, 第3次迭代生成的网格在激波、边界层及混合区已做了很好的加密, 计算结果与实验吻合较好, 本节的计算就以

图9 喉道附近壁面 y^+ 分布Fig. 9 y^+ on upper and lower walls of throat

(a) 支板两侧



(b) 第二个激波反射点周围

图10 壁面附近网格特征

Fig. 10 Detailed geometry near wall

此网格(图8(b))为初始网格进行反应流计算。

湍流与燃烧相互影响的耦合采用火焰面模型进行计算。火焰面模型根据层流火焰面假设建立起流场物理量关于混合物分数、标量耗散率的微分方程,求解之后可得到不同混合物分数、标量耗散率对应的组分质量分数、温度等物理量,再结合

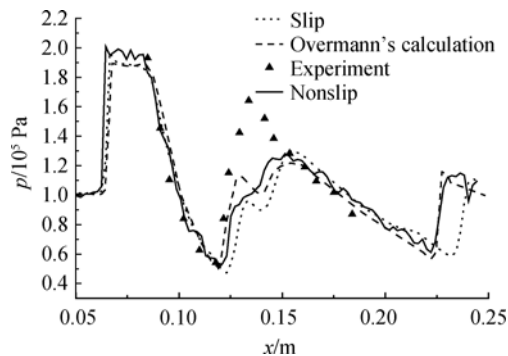


图11 下壁面压力分布

Fig. 11 Pressure distributions along lower wall

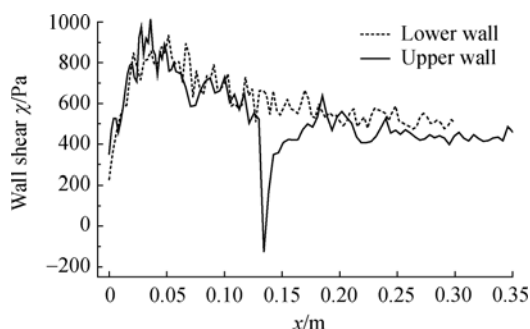


图12 壁面水平剪应力分布

Fig. 12 Wall shear χ distributions along upper and lower wall

混合物分数、标量耗散率在流场中分布的概率密度函数(PDF)进行积分,最终得到物理量在流场中的分布。

本文的燃烧计算参考文献[17],采用氢气-空气7组分7步化学反应机理,反应速率常数由Arrhenius公式确定: $k = AT^3 \exp(T/T_{\text{activation}})$ 。基元反应方程式及对应参数如表2所列,其中M为第三体,对 H_2 的效率是2.5, H_2O 是16.0,其他组分为1.0。

图13是计算得到的初始燃烧场。由于网格资源是在冷流场参数下进行配置的,某些燃烧区域因网格太过稀疏而无法得到准确的结果。

图14展示了燃烧流场自适应求解过程中网格分布与流场结构的演变历程。因为初始网格来源于冷流场自适应计算的原因,初始流场解对燃烧区域的描述不太理想,第1次迭代生成的网格及其上得到流场有了改善,火焰面附近的网格出现了明显聚集。经过3次迭代,网格资源的分配与计算结果都趋于稳定。在火焰面附近,网格的各向异性特征已非常明显,见图15。

表2 7组分7步(7×7)氢气-空气化学反应机理的反应方程式及速率常数

Table 2 Reactions and rate constants for the 7-species 7-step (7×7) H₂-air chemical kinetic mechanism

No.	反应方程式	$A/((\text{cm}^3/\text{mol})^{n-1} \cdot \text{s}^{-1})^{①}$	β	$T_{\text{activation}}/\text{K}$
1	$\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightleftharpoons \text{OH} + \text{OH}$	0.170×10^{14}	0	24154.6
2	$\text{H} + \text{O}_2 \rightleftharpoons \text{OH} + \text{O}$	0.120×10^{18}	-0.91	8309.7
3	$\text{OH} + \text{H}_2 \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{H}$	0.220×10^{14}	0	2591.6
4	$\text{O} + \text{H}_2 \rightleftharpoons \text{OH} + \text{H}$	0.506×10^5	2.67	3165.3
5	$\text{OH} + \text{OH} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{O}$	0.630×10^{13}	0	548.5
6	$\text{H} + \text{OH} + \text{M} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{M}$	0.221×10^{23}	-2.00	0
7	$\text{H} + \text{H} + \text{M} \rightleftharpoons \text{H}_2 + \text{M}$	0.730×10^{18}	-1.00	0

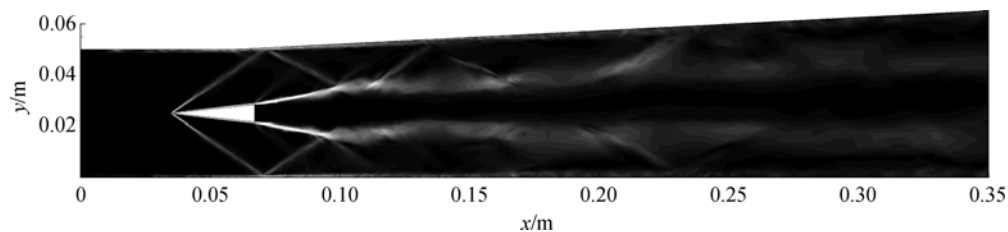
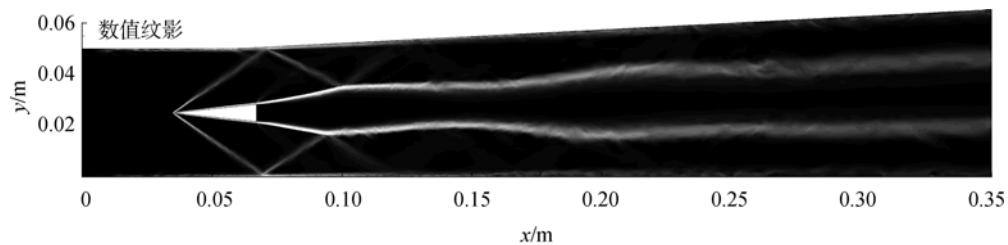
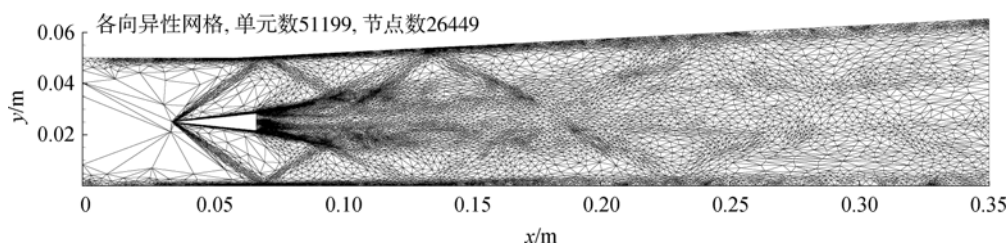
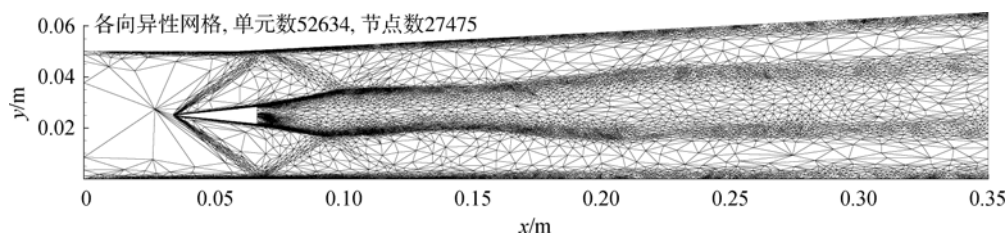
① n 为反应级数.

图13 初始燃烧场

Fig. 13 Initial reaction flow field



(a) 第1次迭代



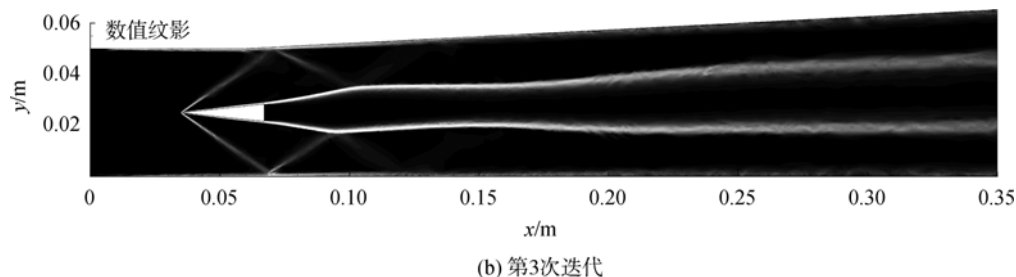


图14 燃烧流场的自适应求解过程

Fig. 14 Adaptive solution for reaction flow field

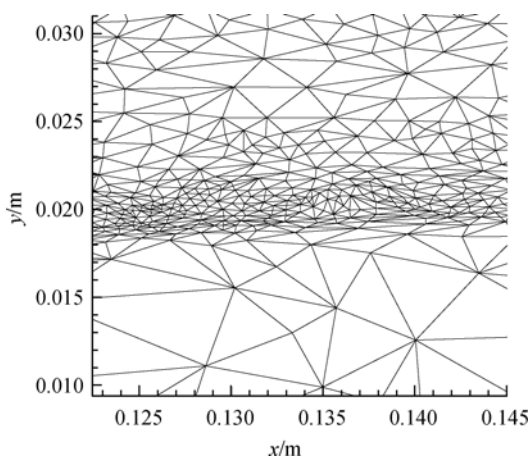


图15 燃烧区域网格特征

Fig. 15 Detailed geometry of reaction area

图16给出了本文反应流计算结果与实验纹影图的对比,计算得到的燃烧区域宽度及位置都与实验结果非常吻合.湍流燃烧问题(特别超声速燃烧)一直是计算流体力学难以准确计算的难题,文献[18]中采用大涡模拟(LES)方法与火焰面模

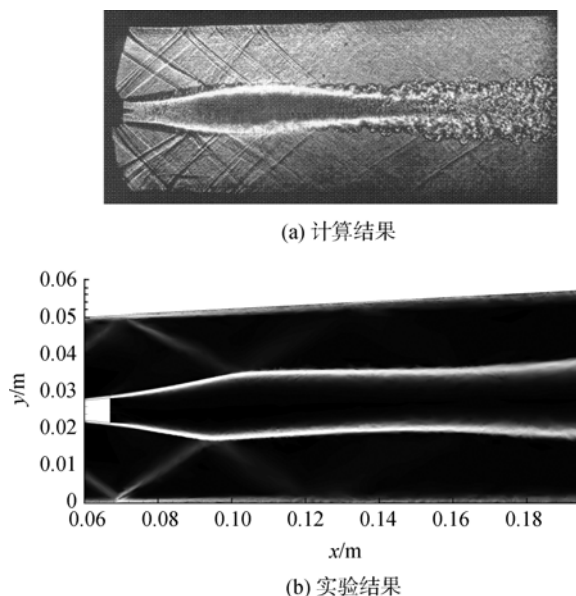


图16 反应流数值纹影与实验纹影对比

Fig. 16 Numerical shadow compares with experiment

型,计算得到的燃烧区域与实验结果吻合不甚理想.这也反映了各向异性网格自适应计算对超燃问题具有良好的适应性和有效性.图17定量给出了计算所得速度分布与实验测量曲线的对比图,其中图17(a)是燃烧室中心线上水平速度 u 的分布, $x=110\text{ mm}$ 往后计算结果与实验测量值比较吻合,但 $x=110\text{ mm}$ 往前,计算结果与实验测得数值偏离较大.从图17(b) $x=78\text{ mm}$ 处 u 在 y 方向上的分布图可以看出上述偏离主要发生在燃烧室中线附近.

从图17(c)、图17(d)两图可以看到在燃烧室后部,计算值与实验值比较接近.在图17(d)中加入了文献[1]中的计算结果,同样是采用网格自适应计算,本文得到的结果比其更接近实验测量值.

$x=110\text{ mm}$ 以前,中心线附近,隔板后方,回流区的流动十分复杂,分布着各种尺度的涡,湍流强度强,瞬时特征明显,而且还有氢气射流及燃烧影响.在这个区域的数值模拟和实验测量都存在较大的困难,可能是造成计算结果与实验对比产生误差的一个因素.图18展示了隔板后方的流场结构,可见如果数值模拟结果中隔板后方回流区的大小和位置与实验测量状态有所差别的话,就会对结果对比造成较大影响.引起隔板后方数值模拟误差的另一个因素,可能是三维流场的二维近似.实际的DLR燃烧室在隔板底部布置了15个直径为 1 mm 的燃料射流孔,而本文的计算采用了二维近似处理.图19给出了 $x=78\text{ mm}$, $x=125\text{ mm}$ 及 $x=233\text{ mm}$ 三个截面处温度在 y 方向上分布的计算结果与实验测量值的对比,总体上两者的温度范围与分布曲线比较吻合,但最高温度的数值及其出现的位置,本文的计算结果与实验测量值有一点偏差.图17中计算得到的水平速度极值大小及出现位置与实验测量值也有一定偏差,可能是三维实验模型中流场物理量在多余的维度上非均匀分布所造成的.

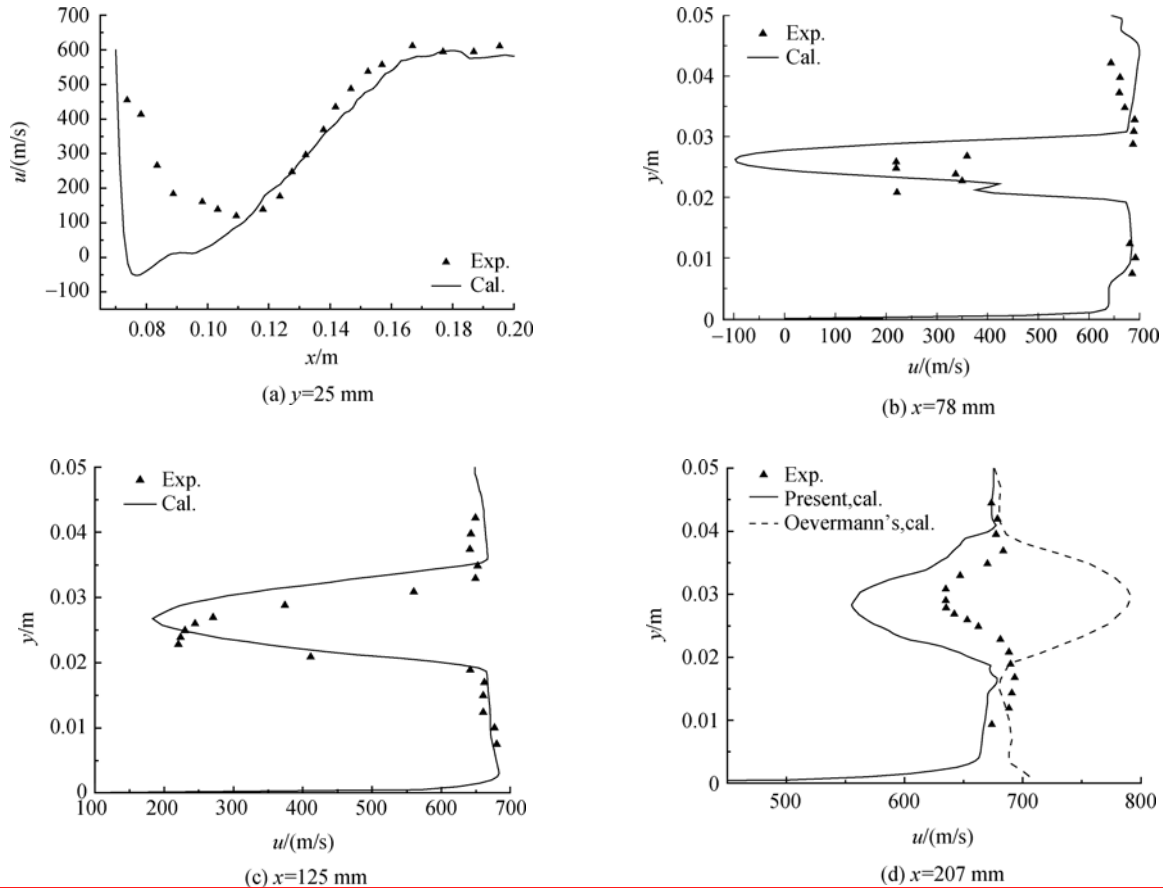
图 17 水平速度 u 分布曲线

Fig. 17 Velocity u profiles along $y=25$ mm and at three different streamwise cross-sections x

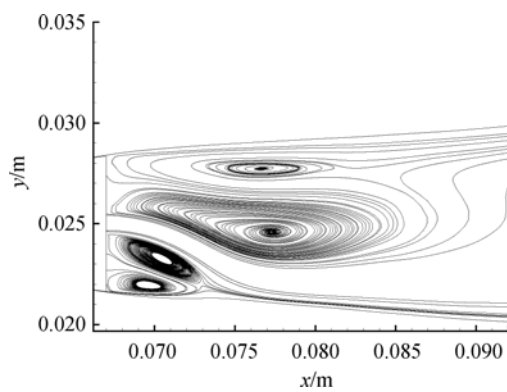


图 18 支板后方流场结构

Fig. 18 Detailed description of flow field behind the wedge

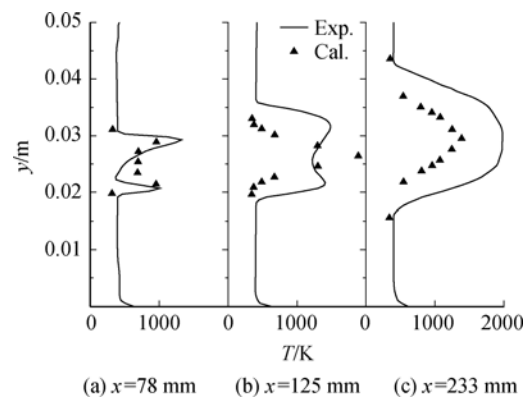


图 19 温度分布曲线

Fig. 19 Temperature profiles at different streamwise locations x

4 结 论

本文将基于 Mach 数场的各向异性网格自适应求解方法成功应用于超燃冲压发动机内流场的数值模拟,得出如下结论:

1) 各向异性网格自适应计算能准确捕捉超声速黏性流动中的激波、膨胀波、射流、边界层等

大梯度区域并做有效加密;

2) 各向异性网格自适应计算能准确捕捉超声速燃烧中的火焰面及主要反应区域并做有效加密,同时不影响激波、边界层等区域的捕捉与优化,网格资源分配合理;

3) 能准确识别大梯度区域的各向异性并用各向异性网格进行填充,减少网格数量(滑移、无

滑移、反应流3个算例分别减少36.2%,36.4%、36.8%),降低计算规模,对存在显著各向异性特征的超燃流场具有优良的适应性和有效性;

4)能显著提升激波、边界层、火焰面等各向异性大梯度流动区域的计算准确性和分辨率。

参考文献:

- [1] Oevermann M. Numerical investigation of turbulent hydrogen combustion in a SCRAMJET using flamelet modeling[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2000, 4(7): 463-480.
- [2] Castro-Diaz M J, Hecht F, Mohammadi B, et al. Anisotropic unstructured mesh adaption for flow simulations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1997, 25(4): 475-491.
- [3] Belhamadia Y, Fortin A, Chamberland É. Three-dimensional anisotropic mesh adaptation for phase change problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 201(2): 753-770.
- [4] Mura A, Izard J F. Numerical simulation of supersonic nonpremixed turbulent combustion in a scramjet combustor model[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2010, 26(4): 858-868.
- [5] 邹建锋, 盛东, 邢菲, 等. 基于各向异性非结构网格的超声速流动自适应计算[J]. *空气动力学学报*, 2013, 31(1): 47-51.
ZOU Jianfeng, SHENG Dong, XIN Fei, et al. Anisotropic unstructured mesh adaption for supersonic flow simulation[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2013, 31(1): 47-51. (in Chinese)
- [6] Habashi W G, Dompierre J, Bourgault Y, et al. Anisotropic mesh adaptation: towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD: Part I general principles[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2000, 32(6): 725-744.
- [7] Dompierre J, Vallet M, Bourgault Y, et al. Anisotropic mesh adaptation: towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD: Part III unstructured meshes[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2002, 39(8): 675-702.
- [8] Tam A, Ait-Ali-Yahia D, Robichaud M, et al. Anisotropic mesh adaptation for 3D flows on structured and unstructured grids[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 189(4): 1205-1230.
- [9] Dolejsi V. Anisotropic mesh adaption technique for viscous flow simulation[J]. *East West Journal of Numerical Mathematics*, 2001, 9(1): 1-24.
- [10] Bottasso C. Anisotropic mesh adaption by metric-driven optimization [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60(3): 597-639.
- [11] Dolejsi V, Felman J. Anisotropic mesh adaptation for numerical solution of boundary value problems[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2004, 20(4): 576-608.
- [12] Frey P, Alauzet F. Anisotropic mesh adaptation for CFD computations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(48/49): 5068-5082.
- [13] Remacle J, Li X, Shephard M, et al. Anisotropic adaptive simulation of transient flows using discontinuous Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 62(7): 899-923.
- [14] Vassilevski Y, Dyadechko V, Lipnikov K, et al. Hessian-based anisotropic mesh adaptation in domains with discrete boundaries[J]. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2005, 20(4): 391-402.
- [15] Lipnikov K, Vassilevski Y. Analysis of hessian recovery methods for generating adaptive meshes[C]//Philippe P, Peday. *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtables*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlay, 2006: 163-171.
- [16] Waidmann W, Alff F, Böhm M, et al. Supersonic combustion of hydrogen/air in a SCRAMJET combustion chamber[J]. *Space Technology*, 1995, 15(6): 421-429.
- [17] Mitchella D, Higgins K, Smith N S A. Radical-farming scramjet combustion-comparison of numerical predictions with shock tunnel measurements[R]. AIAA 2006-8022, 2006.
- [18] Berglund M, Fureby C. LES of supersonic combustion in a scramjet engine model[J]. *Proceedings of the Combustion Institute*, 2007, 31(2): 2497-2504.

(编辑:秦理曼)